numwis 2 –

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

8

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1 v.d. 5
Adres:	Studierichting:	Tentamen: NW2
Postcode en		Datum: 03/11/2004
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent: Wobs

Opgave 1: a). $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kunnen we met de central difference formulae zo omschrijven:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{k^2} + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \mu_j)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j)$$

voor zekere ξ_i, μ_j en met $v_{i,j} \approx u(ih, jk)$

dus: $$\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{k^2} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h^2}$$

9

waar k een tijdstap is en h de stap in de ruimte (dus $\frac{1}{m}$, want het interval is 1 lang en we nemen m stappen)

we weten ook $u(0,t) \approx v_{0,j} = 0$

$u(1,t) \approx v_{m,j} = 0$ $\forall j$

ook zijn $u(x,0) \approx v_{i,0}$ gegeven en $u_t(x,0) \approx$

De afbreekfout is van $O(h^2 + k^2)$

1.b). voor stabiliteit moet de wortelconditie gelden, en moet een verstoring alleen lineair doorgaan.

0

$$\cancel{\frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{k^2} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h^2}}$$

$$\cancel{\frac{v_{i+1,j+1} - k v'_{i+1,j+1} - \frac{k^2}{2} v''_{i+1,j+1} - \frac{k^3}{6} v'''_{i+1,j+1} - \dots}{k^2} - \frac{v_{i+1,j+1} - h v'_{i+1,j+1} - \frac{h^2}{2} v''_{i,j+1} - \frac{h^3}{6} v_{i,j} \dots}{h^2}}$$

$$\cancel{= \frac{2v_{ij}}{k^2} - \frac{2v_{ij}}{h^2} - \frac{v_{i-1,j-1} + k v'_{i-1,j-1} + \frac{k^2}{2} v''_{i-1,j-1} + \dots}{k^2} + \frac{v_{i-1,j-1} + h v'_{i-1,j-1} + \frac{h^2}{2} v''_{i-1,j-1}}{h^2}}$$

~~pas toe op testverg:~~ $\cancel{y' = \lambda y}$

$$\cancel{\frac{\lambda ih - 2\lambda ih + \lambda ih}{k^2} = \frac{\lambda(i+1)h - 2\lambda ih + \lambda(i-1)h}{h^2}}$$

We zouden kunnen kijken naar het absolute stabiliteits-gebied om deze opgave te maken.

neem $w_{i+1} = v_{i+1,j+1}$, $w_i = v_{ij}$, $w_{i-1} = v_{i-1,j-1}$
en vind dan het karakteristieke polynoom. Aan de hand hiervan kunnen we dan kijken wanneer de wortels van dit polynoom ≤ 1 zijn. zie collegeaantekeningen

1).c). $f(x-t)$ is een oplossing van de golfvergelijking:

$u = f(x-t)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-t)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-t)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = -f'(x-t)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f''(x-t)$.

ze zijn gelijk, dus $f(x-t)$ is een oplossing.

~~we weten het volgende:~~

$\cancel{v_{i,j+1} = v_{i,j} + k v'_{i,j} + \frac{k^2}{2} v''_{i,j} + \frac{k^3}{6} v'''_{i,j} + \dots}$

$\cancel{v_{i,j-1} = v_{i,j} - k v'_{i,j} - \frac{k^2}{2} v''_{i,j} - \frac{k^3}{6} v'''_{i,j} + - \dots}$

$\cancel{\text{links} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{k^2} = \frac{v_{i,j} + k v'_{i,j} + \frac{k^2}{2} v''_{i,j} + \frac{k^3}{6} v'''_{i,j} + \dots - 2v_{i,j} + v_{i,j} - k v'_{i,j} - \frac{k^2}{2} v''_{i,j} - \frac{k^3}{6} v'''_{i,j} - \dots}{k^2}}$

$\cancel{= 0}$ ~~dus als rechts = 0 geldt het voor alle h, k:~~

$\cancel{v_{i+1,j} = v_{i,j} + h v'_{i,j} + \frac{h^2}{2} v''_{i,j} + \frac{h^3}{6} v'''_{i,j} + \dots}$

$\cancel{v_{i-1,j} = v_{i,j} - h v'_{i,j} - \frac{h^2}{2} v''_{i,j} - \frac{h^3}{6} v'''_{i,j} - \dots}$

$\cancel{\text{rechts} = \frac{v_{i,j} + h v'_{i,j} + \frac{h^2}{2} v''_{i,j} + \frac{h^3}{6} v'''_{i,j} + \dots - 2v_{i,j} + v_{i,j} - h v'_{i,j} - \frac{h^2}{2} v''_{i,j} - \frac{h^3}{6} v'''_{i,j} \dots}{h^2}}$

NEGEREN

$\cancel{\Rightarrow 0}$ ~~dus~~

We weten $v_{i,j} = f(x_i - t_j) = f(ih - jk)$

~~Nou~~

$\Rightarrow \frac{f(ih-(j+1)k) - 2f(ih-jk) + f(ih-(j-1)k)}{k^2}$

$= f((i+1)h - jk) - 2f(ih-jk) + f((i-1)h-jk)$

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2 v.d. 5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

$f(ih-(j+1)k) = f(ih-jk-k) = f(ih-jk) - kf'(ih-jk) - \frac{k^2}{2}f''(ih-jk) - \ldots$

$f(ih-(j-1)k) = f(ih-jk+k) = f(ih-jk) + kf'(ih-jk) + \frac{k^2}{2}f''(ih-jk) + \ldots$

links $= \dfrac{f(ih-jk) - 2f(ih-jk) + f(ih-jk)}{k^2} = 0$ altijd

$f((i+1)h-jk) = f(ih-jk+h) = f(ih-jk) + hf'(ih-jk) + \frac{h^2}{2}f''(ih-jk) + \ldots$

$f((i-1)h-jk) = f(ih-jk-h) = f(ih-jk) - hf'(ih-jk) - \frac{h^2}{2}f''(ih-jk) - \ldots$

rechts $= \dfrac{f(ih-jk) - 2f(ih-jk) + f(ih-jk)}{h^2} = 0$ altijd

Dus voor alle h, k is deze $f(x-t)$ een oplossing.

zie collegeaant.

1). d). ~~wortelconditie: Als de ... van het karakteristiek polynoom ≤ 1 dan is de methode stabiel. Als~~

~~[illegible]~~ wortelconditie: Als de wortels van het karakteristieke polynoom van een methode ≤ 1 zijn dan is de methode stabiel. ~~De methode is sterk stabiel als de wortel $\lambda = 1$ enkelvoudig is, anders is hij zwak stabiel.~~

6   eenvoudiger Er moet een wortel 1 zijn!
invullen geeft 4 dus niet OK

consistent: $\tau_{i+1}(h) \to 0$ als $h \to 0$.

bij dit polynoom r^3+r^2+r+1 hoort $w_{i+1} = -w_i - w_{i-1} - w_{i-2} + hF$

$\tau_{i+1}(h) = \dfrac{w_{i+1} + w_i + w_{i-1} + w_{i-2}}{h} + F(f(t_i, w_i) + \ldots)$

$= \dfrac{w_i + hw_i' + \frac{h^2}{2}w_i'' + \frac{h^3}{2}w_i''' + \ldots + w_i + w_i - hw_i' - \frac{h^2}{2}w_i'' - \frac{h^3}{2}w_i''' - \ldots}{h}$

4    $+ F(f(t_i, w_i) + \ldots)$

Als $h \to 0$ dan $\tau_{i+1}(h) \longrightarrow \infty$
dus is de methode niet consistent. Dit is tegenspraak, dus nee, het polynoom was niet goed afgeleid.

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3 v.d. 5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Opgave 2,: a). ~~$A(x+\Delta x) = b+\Delta b$ $Ax + A\Delta x = b + \Delta b$~~ In woorden betekent dit 'de fout in x wordt begrensd door de fout in b maal een constante, het conditiegetal'.

bewijs: NEGEREN

$A(x+\Delta x) = b+\Delta b \Rightarrow Ax + A\Delta x = b+\Delta b$

$\frac{Ax}{\|x\|} + \frac{A\Delta x}{\|x\|} = \frac{b+\Delta b}{\|x\|}, \quad \frac{A\Delta x}{\|x\|} = \frac{b+\Delta b - Ax}{\|x\|}$

$Ax = b \Rightarrow \frac{A\Delta x}{\|x\|} = \frac{\Delta b}{\|x\|}, \quad \frac{\Delta x}{\|x\|} = A^{-1}\left(\frac{\Delta b}{\|x\|}\right) = A^{-1}\|b\|\left(\frac{\Delta b}{\|x\|\|b\|}\right)$

$\left\|\frac{\Delta x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|b\|\|\Delta b\|}{\|x\|\|b\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|Ax\|\|\Delta b\|}{\|x\|\|b\|}$

$\le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|x\|\|\Delta b\|}{\|x\|\|b\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|\Delta b\|}{\|b\|}$ q.e.d.

2). b). De 2norm van een matrix is gedefinieerd door $[\rho(A^tA)]^{1/2}$ waar $\rho(A^tA)$ de spectraalradius is van A^tA.
Laat de eigenwaardes van de matrix A gegeven worden door $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

dit is al een stap verder dan de def. $\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

we weten $\det(I\lambda - A) = \det(I\lambda - A^t)$ dus de eigenwaardes van A zijn gelijk aan de eigenwaardes van A^t. De eigenwaardes van A^tA zijn dus λ_i^2. We weten ook dat de eigenwaardes van A^{-1} $\frac{1}{\lambda_i}$ zijn, dus de eigenwaardes van $(A^tA)^{-1}$ zijn $\frac{1}{\lambda_i^2}$

9

Dus: $\|A\|_2 = [\rho(A^tA)]^{1/2} = [\max_{1\le i\le n}|\lambda_i^2|]^{1/2} = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

en $\|A^{-1}\|_2 = [\rho((A^{-1})^tA^{-1})]^{1/2} = [\max_{1\le i\le n}|\frac{1}{\lambda_i^2}|]^{1/2} = \max_{1\le i\le n}\frac{1}{|\lambda_i|}$

$\max\frac{1}{|\lambda_i|}$ is groot als $|\lambda_i|$ klein is $\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$

Dus het conditiegetal K wordt gegeven door:
$K = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

2). b). Dit is het theorema van Gershgorin, ~~om het te bewijzen nemen we x met $\|x\|_\infty = 1$. De eigenwaarden moeten ... bewijzen voor een λ, en neem een eigenwaarde λ,~~ [illegible] ~~en schrijf het volgende~~
We nemen een eigenwaarde λ met bijbehorende eigenvector x, en zorgen ervoor dat $\|x\|_\infty = 1$.

er geldt dan $Ax = \lambda x$, dus componentsgewijs:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad \forall\, i$$

vindt nu x_k met $|x_k| = \|x\|_\infty = 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k$$

$$(\lambda - a_{kk}) x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j$$

$$|\lambda - a_{kk}|\,|x_k| = \Big|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j\Big| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\,|x_j|$$

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \Big|\frac{x_j}{x_k}\Big| \qquad x_j \leq x_k \;\; \forall_j \;\therefore\; \Big|\frac{x_j}{x_k}\Big| \leq 1 \;\; \forall_j$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

Ik heb dus bewezen dat de eigenwaarde λ in de schijf met centrum a_{kk} en straal $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$ ligt, voor willekeurige λ. Elke λ ligt dus in zo'n schijf, dus alle λ's liggen in de vereniging van de schijven.

2). c). iterative refinement werkt als volgt:
~~eerst lossen we de gegeven vergelijking op met de gegeven methode, daar komt het antwoord y uit rollen dat niet precies is. Deze stoppen we weer in de originele vergelijking en bepalen zo een fout Δy.~~
Met een willekeurige beginschatting y_0 doorlopen we het iteratieve proces, en er komt een antwoord y_n uitrollen.
6 Dit antwoord stoppen we in de differentiaal- of andere soort vergelijking die we aan het oplossen waren en vinden zo dat y_n met een fout Δy afwijkt van het ware antwoord. We doorlopen nogmaals het iteratieve proces met deze keer als beginschatting $y_n + \Delta y$. Dit kunnen we

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4 v.d. 5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum:
		Naam docent:

Opgave 3: b). $I[u] = \int_0^1 p(x)[u'(x)]^2 - 2f(x)u(x)\,dx$

de differentiaalvergelijking die wordt opgelost is:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] = f(x)$$

vandaan ?

3). c). $u = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) \quad \phi_i(x) \in C_0^2[0,1]$

$I[u] = I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\right] = \int_0^1 p(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i'(x)\right]^2 - 2f(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)\,dx$

$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$

$\frac{\partial I}{\partial c_k} = \int_0^1 p(x)\left[2c_k\phi_k'^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} c_i\phi_k'\phi_i' + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} c_i\phi_k'\phi_i'\right] - 2f(x)\phi_k(x)\,dx$

$= \int_0^1 2p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_k'\phi_i' - 2f(x)\phi_k(x)\,dx. \qquad \forall k.$

$\therefore\ 2\int_0^1 p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_k'\phi_i'\,dx = \int_0^1 2f(x)\phi_k(x)dx$

$\int_0^1 p(x)\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_k'\phi_i'\,dx = \int_0^1 f(x)\phi_k(x)dx. \qquad \forall k.$

~~stel we~~ als we dit in matrixvorm willen zien, ~~~~ met ~~Ac=b~~, $Ac=b$, $c=(c_1,\ldots,c_n)^t$ dan zien we dat de k-de rij van A gegeven wordt door:

$$\left(\int_0^1 p(x)\phi_k'\phi_1'dx \quad \int_0^1 p(x)\phi_k'\phi_2'dx \quad \ldots \quad \int_0^1 p(x)\phi_k'\phi_n'dx\right)$$

en dit geldt voor iedere k, dus iedere rij van A zal er zo uitzien. Dus voor A_{ij} hebben we:

$$\underline{A_{ij} = \int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)\,dx}$$

We zien ook dat voor elke k, $b_k = \int_0^1 f(x)\phi_k(x)dx$, en dit geeft ons het tweede gevraagde deel.

3). d). $[0,1]$ wordt in m gelijke stukken gedeeld, h, $\rho(x) = 1$.
ook weten we $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ als $i=j$ en anders 0).

$A_{ij} = \int_0^1 \rho(x)\, \phi_i'(x) \phi_j'(x)\, dx = \int_0^1 \phi_i'(x)\, \phi_j'(x)\, dx$

0

Als $i \neq j$, dan is $A_{ij} = 0$, want $\phi_i' \phi_j' = 0$ als $i \neq j$

anders, $A_{ii} = \int_0^1 dx = 1$

Dus de matrix A wordt de identiteitsmatrix.

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 5 v.d. 5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

3). a). $g(x) = (x, Ax) - 2(x, b)$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} - 2 (b_1x_1 + \ldots + b_n x_n)$$

$$= (a_{11}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + \ldots + a_{n1}x_1x_n + \ldots + a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2 - 2(b_1x_1 + \ldots + b_n x_n))$$

$\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$

W

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = (2a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \ldots + a_{n1}x_n - 2b_1) = 0$$

$\therefore a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = b_1$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = (2a_{ii}x_i + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j - 2b_i) = 0$$

$$\therefore a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad , \; a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall i$$

want A symm.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dus hieruit blijkt dat als x minimaal is voor $g(x)$, het een oplossing is voor $Ax = b$.